

# Die Gezeiten I

Norbert Bertels

Wir alle kennen die Erscheinungen von Ebbe und Flut, die Gezeiten. Wir haben sie kennengelernt bei Ferien oder anderen Aufhalten an den Küsten Deutschlands, Europas, ja der ganzen Welt, und wir wissen, dass es an den Küsten im Verlauf eines Tages etwa zweimal Flut und entsprechend auch zweimal Ebbe gibt. Bild 1 zeigt die Erde mit zwei Flutbergen und den Mond auf seiner Bahn um die Erde.

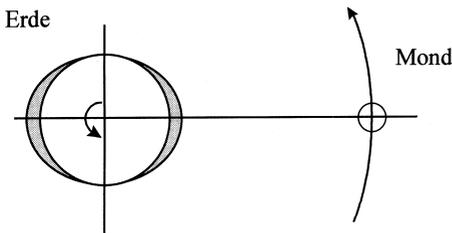


Bild 1

Wir sagen schlechthin, der Mond ziehe durch seine Gravitationskraft die Wassermassen auf der ihm zugewandten Seite der Erde an, und somit entstehe dort ein Flutberg. Auf der dem Mond abgewandten Seite befindet sich zum gleichen Zeitpunkt aber auch ein Flutberg von etwa der gleichen Größe, und hier können wir die Gravitationskraft des Mondes nun nicht mehr so einfach als dessen Ursache angeben.

In diesem Artikel soll erläutert werden, auf welche Weise der in Bild 1 auf der linken Seite gezeichnete Flutberg entsteht und etwas präziser auch der

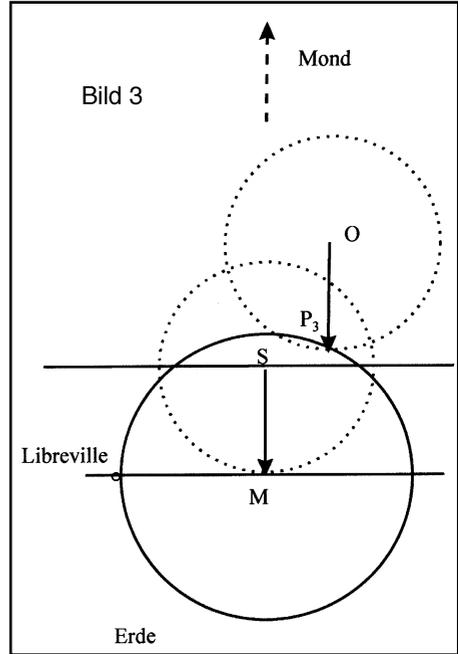
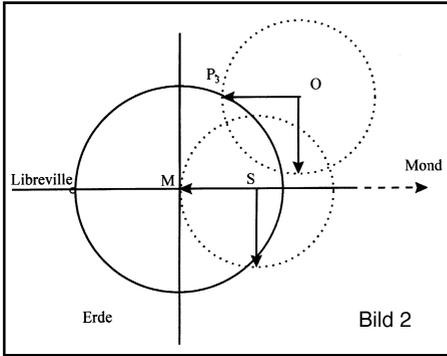
rechts gezeichnete Flutberg, also welche Kräfte in beiden Fällen wirken. Ein weiterer Teil des Artikels befasst sich mit den Auswirkungen der Gezeiten, die seit Millionen, ja Milliarden von Jahren auf die Eigendrehung der Erde Einfluss nehmen, auf die Erde selbst und auf den Mond.

In der Literatur zum Thema Gezeiten ist anstelle von Kräften meist von Beschleunigungen die Rede. In diesem Artikel ist das auch so. Die Beschleunigungen wirken auf Punkte der Erde; das können Orte mit Wasser oder auch mit fester Konsistenz sein. Die Kräfte, die an diesen Punkten herrschen, erhält man durch Multiplikation der Beschleunigungen an diesen Punkten mit der dortigen Masse, zum Beispiel die Masse von 1 Liter oder 1 m<sup>3</sup> Wasser oder eines anderen beliebigen Volumens. Es wird also einfach das Newtonsche Gesetz „Kraft ist gleich Masse mal Beschleunigung“ angewandt.

## Gezeitenkräfte und Gezeitenbeschleunigungen

Erde und Mond stellen eine Art Doppelplanet dar, welcher sich beinahe kreisförmig um den gemeinsamen Schwerpunkt S bewegt. Wegen der 81,3 - fachen größeren Masse der Erde liegt der Schwerpunkt etwa bei 0,75 des Erdradius  $R_E$  auf der Verbindungslinie zwischen Erde und Mond, also noch im Erdinneren. Anhand von Bild 2 und

Bild 3 wollen wir uns die Bewegung von Erde und Mond genauer ansehen.



Wir wollen uns das Problem dadurch vereinfachen, dass wir zunächst von der Eigendrehung der Erde um sich selbst absehen. Ferner machen wir die Annahme, dass die Mondbahn eine genaue Kreisbahn ist, deren Ebene in der Äquatorialebene liegt. Als einen Bezugspunkt auf dem Äquator suchen wir uns die Stadt Libreville aus, die Hauptstadt von Gabun an der Westküste Afrikas. In beiden Bildern schauen wir auf den Nordpol.

In Bild 2 steht der Mond rechts vom Schwerpunkt S, der Mittelpunkt M der Erde links von S. Nun bewege sich das System um 90° links herum und erreicht eine Lage, die in Bild 3 dargestellt ist. Der Mittelpunkt M der Erde wandert dabei auf einem Kreis um den Schwerpunkt S und dem Radius M-S. Der beliebige Punkt  $P_3$  wandert ebenfalls auf einem Kreis mit dem gleichen Radius, aber dem Drehpunkt O. Auch alle anderen Punkte der Erde wandern auf Kreisen mit dem gleichen Radius M-S,

aber jeweils anderem Drehpunkt. Die Geschwindigkeiten, mit denen sich die Punkte auf den Kreisbahnen bewegen, sind für jeden Punkt zu gleichen Zeiten gleich groß. Das hat zur Folge, dass die Zentrifugalbeschleunigungen ( $b_z$  in Bild 4) an allen Punkten der Erde gleich groß und für den gleichen Zeitpunkt auch gleich gerichtet sind, nämlich stets vom Mond weg. Die Erde führt somit eine reine translatorische Bewegung aus, ähnlich wie der Putzlapfen beim Fensterputzen. Die Drehachse durch S steht senkrecht zur Zeichenebene und hat eine feste Lage im Raum, aber keine feste Lage in der Erde; sie wandert innerhalb der Erde mit der Drehung des Systems.

In den Bildern 4 und 5 sind die Beschleunigungen und Kräfte als Pfeile dargestellt. Die Pfeillänge ist ein Maß für den Betrag der Beschleunigung bzw. der Kraft, während ihre Richtung durch die Richtung des jeweiligen Pfeils dargestellt wird.

Im Erdmittelpunkt ist die Zentrifugalbeschleunigung  $b_z$  betragsmäßig genau so groß wie die Gravitationsbeschleunigung  $a$  durch die dortige Anziehung des Mondes und hinsichtlich der Richtung ihr entgegengesetzt (vgl. Bild 4). Wir können daher die Zentrifugalbeschleunigung, die ja - wie schon ausgeführt - für alle Punkte der Erde gilt, angeben:

$$b_z = a = G * M / r^2 \quad , \quad (1)$$

wobei  $G = 6,672 * 10^{-11} \text{ m}^3 / (\text{kg s}^2)$  die Gravitationskonstante,  $M = 7,35 * 10^{22} \text{ kg}$  die Mondmasse und  $r = 384.000 \text{ km}$  der Abstand Erde - Mond ist.

Die Gravitationsbeschleunigungen in anderen Punkten der Erde hängen von ihrem Abstand zum Mond ab. Für die

Punkte  $P_1$  und  $P_2$  an der Oberfläche der Erde - dem Mond zu- bzw. abgewandt - gilt:

$$a_1 = G * M / (r - R_E)^2 \quad (2a)$$

bzw.

$$a_2 = G * M / (r + R_E)^2 \quad . \quad (2b)$$

Die resultierenden Beträge  $\Delta b_1$  und  $\Delta b_2$  der Beschleunigungen, die an den Massen in  $P_1$  und  $P_2$  angreifen und die dortigen Gezeitenkräfte bewirken, ergeben sich nach Bild 4 und mit Hilfe der Gleichungen (1), (2a), (2b) zu:

$$\Delta b_1 = a_1 - b_z = GM \left[ \frac{1}{(r - R_E)^2} - \frac{1}{r^2} \right]$$

bzw.

$$\Delta b_2 = b_z - a_2 = GM \left[ \frac{1}{r^2} - \frac{1}{(r + R_E)^2} \right]$$

Weiteres Umformen liefert:

$$\begin{aligned} \Delta b_1 &= \frac{GM}{r^2} \left[ \frac{1}{(1 - R_E/r)^2} - 1 \right] \\ &\approx 2GMR_E / r^3 \end{aligned} \quad (3a)$$

bzw.

$$\begin{aligned} \Delta b_2 &= \frac{GM}{r^2} \left[ 1 - \frac{1}{(1 + R_E/r)^2} \right] \\ &\approx 2GMR_E / r^3 \quad , \end{aligned} \quad (3b)$$

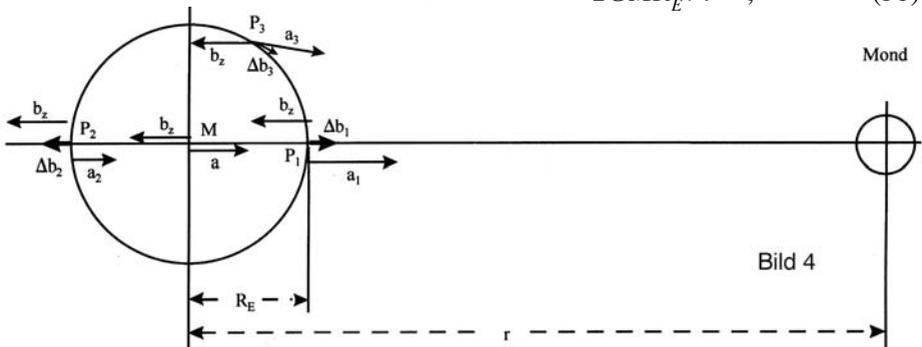


Bild 4

wobei im letzten Schritt die nachstehende Näherung

$$\frac{1}{(1 \pm x)^2} \approx 1 \mp n \cdot x \quad (\text{falls } |x| \ll 1)$$

für  $n = 2$  benutzt wurde;  $x$  spielt hier die Rolle des sehr kleinen Quotienten  $R_E/r$ .

Wir erkennen aus den Gleichungen (3a), (3b) und aus Bild 4, dass die resultierenden Beschleunigungen  $\Delta b_1$  und  $\Delta b_2$  an den Orten  $P_1$  und  $P_2$  etwa gleich groß und entgegengesetzt gerichtet sind. Man nennt sie Gezeitenbeschleunigungen. Mit Hilfe dieser Formeln (3) lassen sich die Beträge der Beschleunigungen in  $P_1$  und  $P_2$  berechnen.

Nach Einsetzen der Gravitationskonstanten  $G$ , der Mondmasse  $M$ , des Erdradius  $R_E = 6378 \text{ km}$  und des Abstands  $r$  des Mondes von der Erde erhalten wir:

$$\Delta b_1 \approx \Delta b_2 \approx$$

$$2 \frac{GMR_E}{r^3} = 11,4 \cdot 10^{-7} \text{ m/s}^2 \quad (4)$$

Im Vergleich zur Erd- oder Fallbeschleunigung  $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ , die ja für alle Punkte der Erdoberfläche etwa den gleichen Betrag hat und in allen Punkten auf den Erdmittelpunkt gerichtet ist, sind die Gezeitenbeschleunigungen  $\Delta b_1$  und  $\Delta b_2$  in  $P_1$  und  $P_2$  etwa 10 Millionen mal kleiner als die dortigen Erdbeschleunigungen und deren Richtungen genau entgegengesetzt. Die Ge-

zeitenbeschleunigungen und die ihnen zugeordneten Gezeitenkräfte tragen an der Entstehung der Gezeiten an diesen Punkten  $P_1$  und  $P_2$  somit gar nicht bei. An anderen Orten der Erdoberfläche ist das nicht so. Dazu betrachten wir in Bild 5 den Punkt  $P_3$ . Die dortige resultierende Gezeitenbeschleunigung  $\Delta b_3$ , die sich aus der richtungsabhängigen Differenz von  $a_3$  und  $b_z$  ergibt, ist vom Betrag sehr klein und kann zerlegt werden in eine Komponente tangential zur Erdoberfläche und eine Komponente senkrecht dazu.

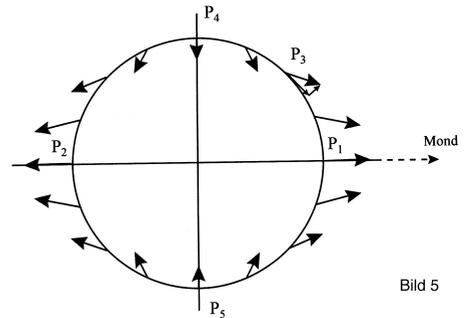


Bild 5

In Bild 5 ist das am Ort  $P_3$  gut erkennbar. Die senkrechte Komponente trägt zur Gezeitenwirkung wegen der größeren und entgegengesetzt gerichteten Erdbeschleunigung nicht bei. Die tangentialen Komponenten aber kann ungestört wirken; die ihr zugeordnete Gezeitenkraft schiebt Wasserteilchen in Richtung  $P_1$ . In Bild 5 sind an weiteren Punkten der Erdoberfläche Gezeitenbeschleunigungen dargestellt. Leicht vorstellbar sind ihre tangentialen Komponenten, die hier - abgesehen von  $P_3$  - nicht dargestellt sind. Die den

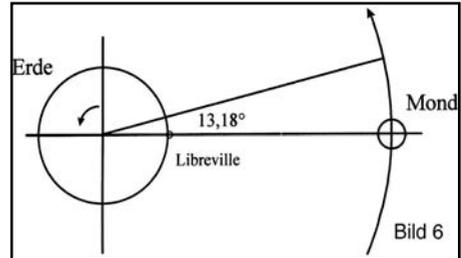
tangentialen Komponenten zugeordneten Kräfte schieben riesige Mengen Wasser auf die Orte  $P_1$  und  $P_2$  zu. Dort entstehen Flutberge. Von den Orten  $P_4$  und  $P_5$  wird Wasser abgezogen; dort entstehen Ebben.

Wir betrachten Bild 5 genau so wie auch die Bilder 1 bis 4, schauen also auf den Nordpol. Die Punkte  $P_1$  bis  $P_5$  liegen auf dem Äquator. Wir erkennen, dass am Äquator – und entsprechend längs jeden Breitengrades - die Maxima und Minima der Gezeiten einander in Winkelabständen von je  $90^\circ$  folgen. Wir können Bild 5 auch einmal so betrachten, dass die Erdachse durch die Punkte  $P_4$  und  $P_5$  geht. Bei  $P_1$  und  $P_2$  und längs den Längengraden durch  $P_1$  und  $P_2$  entstehen Fluten. An den Polen herrscht ständig Niedrigwasser.

Bis jetzt hatten wir vorausgesetzt, dass sich die Erde nicht um ihre Achse dreht. Diese Voraussetzung lassen wir jetzt fallen und betrachten das System unter der Berücksichtigung, dass sich die Erde einmal in 24 Stunden um sich selbst dreht.

Dabei unterläuft die Erde gewissermaßen die Kräfte- bzw. die Beschleunigungsverteilung, wie sie in den Bildern 4 und 5 dargestellt ist. Die beiden Maxima und die beiden Minima umlaufen die Erde somit in etwa 24 Stunden. In dieser Zeit hat sich auch das System

Erde - Mond etwas bewegt, so dass die tatsächliche Umlaufzeit 24 Stunden und 52 Minuten beträgt (vgl. Bild 6).



Der Mond umläuft in 27,32 Tagen die Erde, pro Tag sind das dann  $13,18^\circ$ . Die Erddrehung braucht dafür ca. 52 Minuten.

Wenn also auf Norderney an einem Tag um 9.00 Uhr Morgenhochwasser ist, dann ist am folgenden Tag theoretisch um 9.52 Uhr Morgenhochwasser.

Die hier dargestellten Verhältnisse nehmen keine Rücksicht auf das Vorhandensein der Kontinente und Landmassenverteilungen, durch die die Gezeitenströmungen in hohem Maße beeinflusst werden. Infolge der Landmassen kommt der Flutberg an den einzelnen Orten verspätet an. Diese Verspätung nennt man "Hafenzeit". Für Hamburg gilt z. B. eine Hafenzeit von 5 bis 6 Stunden.

Auch die Sonne beeinflusst die Gezeiten. Wir können ihre Wirkung ebenfalls aus der Gleichung (3) ermitteln und diese mit derjenigen des Mondes

vergleichen. Dazu setzen wir in die Gleichung  $\Delta b \approx 2GMR_E / r^3$  für die Gezeitenbeschleunigung (vgl. Gl. (3) und (4)) mondspezifische Werte

(M = Mondmasse,

r = Abstand Erde - Mond) und sonnen-spezifische Werte

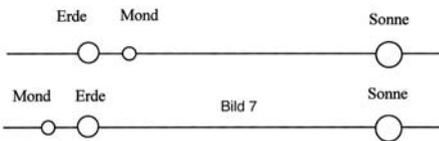
(M = Sonnenmasse =  $1,989 \cdot 10^{33}$  kg,

r = Abstand Erde - Sonne = 149,6 Millionen km) ein und bilden dann das Verhältnis:

$$\frac{\Delta b_{Mond}}{\Delta b_{Sonne}} = \frac{M_{Mond} \cdot r_{Sonne}^3}{M_{Sonne} \cdot r_{Mond}^3} = 2,18 \quad (5)$$

Die Gezeitenbeschleunigung der Sonne ist kleiner als die des Mondes, weil die dritte Potenz des jeweiligen Abstands einen höheren Einfluss hat als die jeweilige Masse.

Bei Neu- und bei Vollmond liegen Sonne, Erde und Mond etwa auf einer Wirkungslinie (vgl. Bild 7), so dass



die Gezeitenwirkung von Mond und Sonne sich addieren: es kommt zu einer Springflut. Bei Halbmond subtrahieren sich die Wirkungen: es kommt zu einer Nippflut.

Das Verhältnis zwischen Springflut und Nippflut beträgt:

$$V = (2,18 + 1) : (2,18 - 1) = 2,7 \quad (6)$$

Die Wirkung einer Springflut ist also 2,7 - mal größer als die einer Nippflut. Der mittlere Tidenhub kann bis zu 15 m betragen, z. B. in Neuschottland, in der Bucht von St. Malo 12 m, an der Nordseeküste 4 m. Auf dem freien Ozean beträgt der Tidenhub allerdings nur 35 cm.

Die Gezeiten wirken auch auf den festen Erdkörper. Die Deformation beträgt durch den Mond etwa 21,4 cm, durch die Sonne 9,9 cm. Es entstehen also Springflutamplituden von etwa 60 cm, d. h.  $\pm 30$  cm.

## Auswirkungen der Gezeiten

Beim Wandern der Flutberge und bei der Bewegung der Erdkruste kommt es zu Reibungswirkungen und Erwärmungen (Leistung etwa  $10^{12}$  W). Das bewirkt eine langsame, aber ständige Abbremsung der Erddrehung und somit eine Zunahme der Tageslänge (knapp 2 ms pro Jahrhundert). Auch die Umlaufzeit des Mondes wird länger, der Abstand Erde - Mond wird allmählich größer (knapp 4 cm pro Jahr).

*In der nächsten Ausgabe der Andromeda, werden diese Auswirkungen ausführlich beschrieben.*

## Die Gezeiten II

*Norbert Bertels †*

Im ersten Teil des Artikels (Andr. 1/08) wurde erläutert, wie die Gezeiten, also Fluten und Ebben, entstehen, die wir an den Küsten je zweimal pro Tag beobachten können. Sie werden verursacht durch Kräfte, die an allen Punkten der Erde wirken. Man nennt sie Gezeitenkräfte. Diese setzen sich zusammen aus zwei Anteilen, nämlich der Gravitationskraft, die der Mond auf den betrachteten Punkt der Erde ausübt, und der dortigen Zentrifugalkraft, welche durch die Drehbewegung des Systems Erde-Mond um den gemeinsamen Schwerpunkt hervorgerufen wird. Die Zentrifugalkräfte sind an allen Punkten der Erde gleich groß und gleich gerichtet, nämlich stets parallel zur Verbindungslinie Erde-Mond und vom Mond weg weisend.

Die Gezeitenkräfte an der Erdoberfläche lassen sich zerlegen in zwei Komponenten, eine tangential zur Erdoberfläche und die andere senkrecht dazu. Die senkrechten Komponenten sind auf das Zentrum der Erde gerichtet oder genau entgegengesetzt. Sie tragen zur Bildung der Fluten nicht bei, weil sie sehr klein gegenüber den Schwerkraften der Erde sind, die an den betrachteten Punkten ja ebenfalls wirken und immer auf das Zentrum der Erde gerichtet sind. Die tangentialen

Komponenten der Gezeitenkräfte sind zwar auch sehr klein, doch können sie ungestört wirken. Sie setzen die Wasserteilchen der Weltmeere in Bewegung und zwar in Richtung Mond, wenn ihr Abstand zu ihm kleiner ist als die Distanz Erdmittelpunkt-Mond, oder in genau entgegengesetzter Richtung, wenn ihr Abstand zum Mond größer ist als jene Distanz. Auf diese Weise entstehen die Flutberge. Dabei werden gewaltige Wassermassen bewegt, so dass Tidenhübe von rd.  $\pm 35$  cm auf den freien Ozeanen und bis zu 15 m in Küstenregionen erreicht werden. An den Orten der Erdoberfläche, von denen die Wasserteilchen weggetrieben werden, entstehen Ebben.

Auch die Sonne wirkt an der Bildung der Gezeiten mit. Ihre Wirkung ist jedoch weniger als halb so groß wie die durch den Mond. Dennoch ist ihr Einfluss spürbar. Wenn Erde, Mond und Sonne ungefähr auf einer Linie liegen - das ist der Fall bei Voll- und bei Neumond -, addieren sich die Wirkungen von Mond und Sonne und es kommt zu Springfluten; bei Halbmond subtrahieren sie sich und es kommt zu Nippfluten.

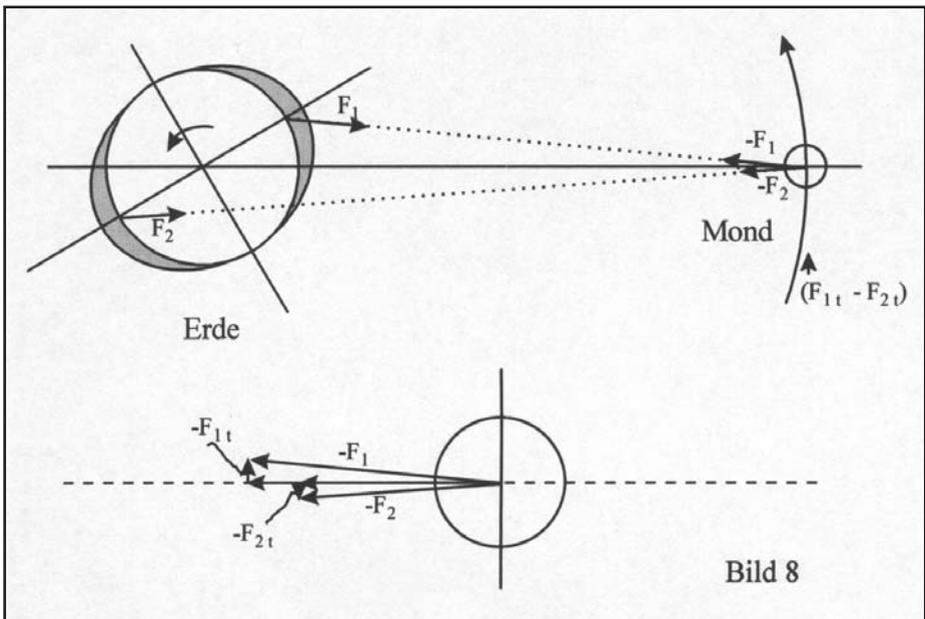
Die Gezeitenkräfte wirken nicht nur auf die Wasserflächen der Erde, sondern auch auf die Erdkruste, die ja elastisch verformbar ist. Die Tiden der Verformungen betragen bis zu  $\pm 30$  cm.

## Langfristige Auswirkungen

Nun wird dargestellt, was das tägliche Wandern der zwei Flutberge um die Erde in sehr langen Zeiträumen bewirkt. Durch die Bewegung des Wassers entlang der Meeresböden, der Küstenformationen der Kontinente und durch die Verformungen der Erdkruste kommt es zu Erwärmungen und Reibungswirkungen, die eine langsame, ständige Abbremsung der Eigendrehung der Erde um sich selbst verursachen: die Erde verliert Drehimpuls und die Tage werden somit länger.

Auch für das System Erde-Mond gilt der Satz von der Erhaltung des Gesamtdrehimpulses. Das hat, wie wir sehen werden, zur Folge, dass sich der Mond von der Erde entfernt und seine Umlaufzeit um die Erde zunimmt.

Wir wollen uns zunächst ansehen, welche Wirkungen das Abbremsen der Eigendrehung der Erde auf den Mond hat und betrachten dazu Bild 8, das im oberen Bildteil das System Erde-Mond darstellt und im unteren eine separate Vergrößerung nur des Mondbereiches. Wir schauen auf den Nordpol der Erde und machen - wie schon im ersten Teil des Artikels - zur Vereinfachung die Annahme, dass die Mondbahn eine Kreisbahn in der Äquatorialebene sei. Die beiden Flutberge sind stark übertrieben gezeichnet. Der rechte, dem Mond zugewandte Flutberg liegt nicht genau auf der Verbindungslinie Erde-Mond und der linke, vom Mond abgewandte Flutberg ebenfalls nicht.



Beide sind etwas in Drehrichtung der Erde verschoben, was durch die Reibungswirkungen verursacht wird. Man kann auch sagen, dass die Flutberge durch die Drehung der Erde etwas mitgerissen werden.

Auf die Massen der beiden Flutberge wirkt der Mond mit seiner Gravitation. Man kann sich einen Schwerpunkt für jeden der beiden Flutberge vorstellen, an dem die Gravitationskräfte jeweils angreifen, hier dargestellt durch  $F_1$  und  $F_2$ . Da der Schwerpunkt des rechten Flutberges näher zum Mond liegt als derjenige des linken, ist  $F_1$  größer als  $F_2$ . Diese beiden Kräfte tragen dazu bei, dass die Eigendrehung der Erde abgebremst wird.

Die Massen der Flutberge wirken nun andererseits mit ihrer Gravitation auf den Mond. Die zugeordneten Kräfte sind genau so groß wie  $F_1$  und  $F_2$ , nur entgegengesetzt gerichtet. Sie sind deshalb mit  $-F_1$  und  $-F_2$  bezeichnet. Nun lassen sich beide Kräfte aufteilen in je eine Komponente auf der Verbindungslinie Erde-Mond und je eine senkrecht dazu, hier mit  $-F_{1t}$  und  $-F_{2t}$  bezeichnet. Die Komponenten auf der Verbindungslinie Erde-Mond verstärken geringfügig die Gravitationskraft zwischen Erde und Mond und sind nicht von besonderer Bedeutung. Die dazu senkrechten Komponenten  $-F_{1t}$  und  $-F_{2t}$  sind zueinander entgegengesetzt gerichtet. Die resultierende Kraft hat den Betrag  $F_{1t} - F_{2t}$  und ist stets

tangential zur Mondbahn in Richtung der Bewegung des Mondes gerichtet. Sie ist zwar klein, wirkt jedoch ständig auf den Mond und seine Drehbewegung auf seiner Bahn um die Erde. Das hat zur Folge, dass der Bahndrehimpuls des Mondes größer wird und somit der Abstand Erde-Mond und die Umlaufzeit des Mondes zunehmen.

Die Kraft  $F_{1t} - F_{2t}$  kann man vergleichen mit der Kraft, die ein Raketenantrieb einer Raumsonde auf die Sonde ausübt. Die Raumsonde soll sich auf einer kreisförmigen Umlaufbahn um die Erde befinden, der Antrieb sei abgeschaltet. Die Raumsonde wird sich weiter auf dieser Umlaufbahn bewegen. Wenn nun der Kommandant den Antrieb einschaltet, wirkt die Kraft des Antriebs auf die Sonde, die dadurch auf eine höhere Umlaufbahn gelangt. Der Abstand Erde-Sonde wird größer. Da auch hier das 3. Keplersche Gesetz (s. u.) gilt, wird somit auch die Umlaufzeit größer.

Nun wollen wir abschätzen, wie lange es dauert, bis der Prozess des Entfernens des Mondes von der Erde beendet ist. Dieser Zeitpunkt ist dann erreicht, wenn durch die Abbremsung die Umdrehungsgeschwindigkeit der Erde um sich selbst so weit abgenommen hat, dass sie genau so groß ist wie diejenige des Systems Erde-Mond bei seiner Drehung um den gemeinsamen Schwerpunkt. Man spricht in diesem Fall von einer gebundenen Rotation. Die Erde

wendet dann dem Mond immer die gleiche Seite zu - der Mond zeigt uns ja schon seit langer Zeit immer die gleiche Seite. Doch dann sehen wir den Mond immer an der gleichen Stelle, wenn wir auf der ihm zugewandten Seite der Erde wohnen. Menschen, die auf der dem Mond abgewandten Erdhälfte leben, müssten dann eine große Reise auf die andere Seite unternehmen, um einmal den Mond zu sehen. Das Beobachten setzt natürlich voraus, dass es zu diesem Zeitpunkt noch Menschen auf der Erde gibt. Die Flutberge bewegen sich dann nicht mehr um die Erde, sie liegen immer auf der Verbindungslinie Erde-Mond. Die Kraft  $F_{1t} - F_{2t}$  existiert nicht mehr.

Wie viele Jahre werden bis zum Erreichen dieses Zeitpunktes verstrichen sein? Wir wissen, dass die Erde für eine Drehung um sich selbst in 100 Jahren 1,64 Millisekunden länger braucht als heute; das sind in 100.000 Jahren 1,64 Sekunden. Bis der Zustand der gebundenen Rotation erreicht ist, werden also sehr viele Jahre vergehen. In der Fachliteratur findet man folgende Angaben: eine, zwei, drei oder gar zehn Milliarden Jahre. Die Unterschiede ergeben sich aus den Modellen, die die Autoren ihren Berechnungen jeweils zugrunde gelegt haben. Wir entscheiden uns aus praktischen Gründen bei unseren weiteren Überlegungen für einen Zeitraum von drei Milliarden Jahren und begründen diese Entscheidung gleich.

Wir können auch einen Blick in die Vergangenheit werfen, in der sich die Erde schneller gedreht haben muss als heute. Wenn wir mit dem genannten Wert einer Tageslängenzunahme von 1,64 Millisekunden in 100 Jahren auf die Zeit vor 400 Millionen Jahren extrapolieren, ergibt sich eine Tageslänge von 22 Stunden und eine Jahreslänge von 400 Tagen, da sich die Dauer des Umlaufs der Erde um die Sonne nicht ändert.

Nun haben die Paläontologen Wells und Scrutton 1963 festgestellt, dass Kalkgehäuse von Korallen, die in Meeren mit starken Gezeiten leben, feine Bänderstrukturen aufweisen, die den Perioden des Jahres, des Monats und des Tages entsprechen. Bei Untersuchungen von versteinerten Korallen aus der Devonzeit, die also vor rd. 400 Millionen Jahren gelebt haben, wurden ebenfalls solche Bänderstrukturen festgestellt, aus denen Tageslängen von 22 Stunden und Jahre mit 400 Tagen ermittelt wurden. Durch diese Untersuchungen wird unsere obige Extrapolation also bestätigt.

Ob solche linearen Extrapolationen auch für eine noch fernere Vergangenheit oder für geologische Zeiträume in sehr ferner Zukunft angewandt werden können, ist nicht sicher. Die Stärke der Gezeitenreibung könnte sich in so langen Zeiträumen durch Strukturveränderungen der Meere und der Kontinente erheblich ändern. Dennoch wollen wir

von einem linearen Prozess ausgehen. Wir wollen jetzt den Abstand Erde-Mond und die Umlaufzeit des Mondes für den Zustand der gebundenen Rotation berechnen.

In der Mechanik gilt der Satz von der Erhaltung des Gesamtdrehimpulses  $L_{\text{Ges}}$ , der sich in unserem Fall zusammensetzt aus dem Eigendrehimpuls  $S_E$  der Erde, dem Bahndrehimpuls  $L_{EM}$  des Systems Erde-Mond bei seiner Bewegung um den gemeinsamen Schwerpunkt und dem Eigendrehimpuls  $S_M$  des Mondes.

Wir unterstellen, dass der Drehsinn der Eigenrotationen und der Bahnbewegung gleich sein soll, oder anders ausgedrückt, dass die Vektoren der Eigendrehimpulse  $S_E$  und  $S_M$  von Erde bzw. Mond und der Bahndrehimpuls  $L_{EM}$  des Systems Erde-Mond parallel zueinander sind und die gleiche Richtung aufweisen. Als Bezugssystem wählen wir den Fixsternhimmel. Für den Zeitpunkt heute gilt der Index 1 und für den Zeitpunkt der gebundenen Rotation der Index 2. Somit lautet der Erhaltungssatz

$$\begin{aligned} L_{\text{Ges}} &= S_{E1} + L_{EM1} + S_{M1} \\ &= S_{E2} + L_{EM2} + S_{M2} \end{aligned} \quad (7)$$

Damit wir die einzelnen Drehimpulse bewerten können, berechnen wir sie.

a.) Heutiger Eigendrehimpuls  $S_{E1}$  der Erde: Unter der Annahme, dass die Erde eine homogene Kugel ist, gilt:

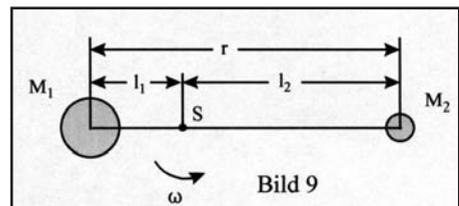
$$S_{E1} = J_E \cdot \omega_{E1} = \frac{2}{5} M_E R_E^2 \cdot \omega_{E1} \quad (8)$$

wobei  $J_E$  das Trägheitsmoment der Erde und  $\omega_{E1}$  ihre heutige Winkelgeschwindigkeit ist, die ja mit der heutigen Tageslänge  $T_{E1}$  von 23h 56m 4s für eine volle Erdumdrehung über die Beziehung  $\omega_{E1} = 2\pi/T_{E1}$  verknüpft ist;  $M_E = 5,97 \cdot 10^{24}$  kg ist die Masse der Erde und  $R_E = 6380$  km ihr Radius.

Nun ist die Erde aber keine homogene Kugel. Die Dichte der oberen Erdkruste beträgt  $2,84 \text{ g/cm}^3$ , sie steigt in Richtung Erdkern zum Teil sprunghaft an und beträgt im Kern  $12,5 \text{ g/cm}^3$ . Anstelle des Faktors  $2/5 = 0,4$  im Trägheitsmoment (vgl. Gl. (8)) ist - laut Angabe des Planetologischen Instituts der WWU Münster - der Faktor  $0,33$  anzusetzen. Nach Einsetzen der angegebenen Werte für die Masse der Erde, ihrem Radius und ihrer Tageslänge erhält man das Resultat

$$S_{E1} = 5,85 \cdot 10^{33} \text{ kg m}^2 / \text{s} \quad (9)$$

b.) Heutiger Bahndrehimpuls  $L_{EM1}$  des Systems Erde-Mond: In der Mechanik gilt für den Bahndrehimpuls  $L$  eines binären Systems, wie etwa die in Bild 9 dargestellte asymmetrische Hantel mit den beiden ungleichen Massen  $M_1$  und  $M_2$ , die sich um ihren gemeinsamen Schwerpunkt  $S$  mit der gleichen



Winkelgeschwindigkeit  $\omega = 2\pi/T$  in Kreisbahnen bewegen, die Beziehung

$$L = M_1 l_1^2 \omega + M_2 l_2^2 \omega \quad (10)$$

Zudem gelten hinsichtlich der Lage des Schwerpunkts S die Beziehungen

$$M_1 l_1 = M_2 l_2 \quad \text{und} \quad l_1 + l_2 = r \quad (11)$$

Hiermit lässt sich Gl. (10) umformen, was auf den Ausdruck

$$L = \frac{M_1 \cdot M_2}{M_1 + M_2} \cdot r^2 \cdot \omega := \mu \cdot r^2 \cdot \omega \quad (12)$$

führt, wobei die so definierte Größe  $\mu$  als reduzierte Masse bezeichnet wird. Angewandt auf das System Erde-Mond - sein Schwerpunkt S befindet sich innerhalb der Erde in einer Tiefe von ca. 1600 km - können wir für den Bahndrehimpuls  $L_{EM1}$  ganz analog zu Gl. (12) schreiben:

$$\begin{aligned} L_{EM1} &= \frac{M_E \cdot M_M}{M_E + M_M} \cdot r_{EM1}^2 \cdot \omega_{EM1} \\ &= \mu \cdot r_{EM1}^2 \cdot 2\pi/T_{EM1} \quad (13) \end{aligned}$$

Setzt man hier die bekannten Werte ein, also die Mondmasse  $M_M = 7,35 \cdot 10^{22}$  kg, die Erdmasse  $M_E$  (s.o.), den heutigen mittleren Abstand Erde-Mond  $r_{EM1} = 384.000$  km und die heutige Winkelgeschwindigkeit  $\omega_{EM1} = 2\pi/T_{EM1}$ , wobei  $T_{EM1} = 27,32$  Tage die heutige Umlaufzeit des Systems Erde-Mond um den gemeinsamen Schwerpunkt S ist, erhält man

$$L_{EM1} = 28,48 \cdot 10^{33} \text{ kg m}^2 / \text{s} \quad (14)$$

also etwa fünfmal größer als der Wert für  $S_{E1}$  in Gl. (9).

c.) Heutiger Eigendrehimpuls  $S_{M1}$  des Mondes: Der Mond bewegt sich schon seit langer Zeit in einer gebundenen Rotation mit dem System Erde-Mond, d. h. die Winkelgeschwindigkeit  $\omega_{M1}$  der Eigenrotation des Mondes ist genau so groß wie die Winkelgeschwindigkeit  $\omega_{EM1}$  des Systems. Die Dichteverteilung innerhalb des Mondes kennen wir nicht. Wir unterstellen daher, dass sie gleichmäßig ist, betrachten also den Mond als homogene Kugel, und wenden Gl. (8) direkt an:

$$S_{M1} = \frac{2}{5} M_M R_M^2 \cdot \omega_{EM1} \quad (15)$$

wobei  $M_M$  die Masse des Mondes (s.o.),  $R_M = 1737$  km sein Radius und  $\omega_{EM1} = \omega_{M1}$  die heutige Winkelgeschwindigkeit des Systems Erde-Mond bzw. des Mondes selbst ist; entsprechend gilt  $T_{EM1} = T_{M1}$  mit dem Wert von 27,32 Tagen (s.o.). Man erhält aus Gl. (15)

$$S_{M1} = 23,59 \cdot 10^{28} \text{ kg m}^2 / \text{s} \quad (16)$$

Der Eigendrehimpuls  $S_{M1}$  des Mondes ist also mehr als 5 Zehnerpotenzen kleiner als der Bahndrehimpuls  $L_{EM1}$  (Gl. (14)) des Systems Erde-Mond und der Eigendrehimpuls  $S_{E1}$  der Erde (Gl. (9)). Er spielt somit im Gesamtdrehimpuls  $L_{Ges}$  keine Rolle. Wir können deshalb  $S_{M1}$  in Gl. (7) vernachlässigen und erhalten

$$L_{Ges} = S_{E1} + L_{EM1} = S_{E2} + L_{EM2} \quad (17)$$

d.) Wir wollen jetzt den Bahndrehimpuls  $L_{EM2}$  des Systems Erde-Mond zum Zeitpunkt 2 berechnen, wenn also das

System in den Zustand der gebundenen Rotation übergegangen ist.

Im Verlauf der Zeit wird  $S_{E1}$  kleiner und  $L_{EM1}$  im gleichen Maße größer, so dass die Summe aus beiden gleich bleibt (vgl. Gl. (17)). Der Betrag, um den  $S_{E1}$  bis zum Erreichen des Zeitpunkts 2 kleiner wird, sei mit  $\Delta_E$  bezeichnet; wir schreiben

$$\Delta_E = S_{E1} - S_{E2} = J_E \omega_{E1} - J_E \omega_{E2} \quad (18)$$

Nun können wir abschätzen, dass sich die Erde zur Zeit 2 viel langsamer drehen wird als zum heutigen Zeitpunkt 1; also wird  $\omega_{E2}$  sehr viel kleiner sein als  $\omega_{E1}$ , so dass wir den  $\omega_{E2}$ -Term in Gl. (18) vernachlässigen können. Durch diese Vorgehensweise ersparen wir uns viel komplizierte Rechenarbeit. Nach Abschluss unserer Rechnung können wir durch einen iterativen Schritt den Fehler, den wir hier ggf. in Kauf nehmen, korrigieren. Wir schreiben also

$$\Delta_E = S_{E1} = J_E \omega_{E1} \quad (19)$$

anstelle von Gl. (18). Um diesen Betrag wird  $L_{EM1}$  auf  $L_{EM2}$  bis zum Erreichen des Zeitpunktes 2 anwachsen, während  $S_{E1}$  auf  $S_{E2}$  abnimmt. Der Rotationsbewegung der Erde um ihre eigene Achse wird also Drehimpuls entzogen und auf die Rotationsbewegung des Systems Erde-Mond um die Drehachse durch den Schwerpunkt S übertragen.

Es ergibt sich somit für den Bahndrehimpuls  $L_{EM2}$  des Systems Erde-Mond zum Zeitpunkt 2 der gebundenen Rotation, wenn man die Werte Gl. (9)

und (14) benutzt und Gl. (19) berücksichtigt:

$$\begin{aligned} L_{EM2} &= \Delta_E + L_{EM1} = S_{E1} + L_{EM1} \\ &= 34,33 \cdot 10^{33} \text{ kg m}^2/\text{s} \quad (20) \end{aligned}$$

Andererseits gilt zu diesem Zeitpunkt aber auch

$$L_{EM2} = \mu r_{EM2}^2 \omega_{EM2} \quad (21)$$

wobei  $r_{EM2}$  die Entfernung des Mondes zur Erde ist und  $\omega_{EM2} = 2\pi/T_{EM2}$  (vgl. Gl. (13) für den Zeitpunkt 1).

Um nun aus Gl. (20) und (21) den Abstand  $r_{EM2}$  des Mondes zur Erde und die Umlaufzeit  $T_{EM2}$  von Erde und Mond um ihren gemeinsamen Schwerpunkt S im Zustand der gebundenen Rotation bestimmen zu können, ziehen wir noch das 3. Keplersche Gesetz heran. In unserem Fall besagt es, dass der Quotient aus der 3. Potenz des Abstands Erde-Mond und dem Quadrat der Umlaufzeit des Mondes um die Erde konstant ist, also:

$$(r_{EM1})^3/(T_{EM1})^2 = (r_{EM2})^3/(T_{EM2})^2 \quad (22)$$

Dann bilden wir aus Gl. (21) und (13) das Verhältnis

$$L_{EM2}/L_{EM1} = (r_{EM2}^2 T_{EM1})/(r_{EM1}^2 T_{EM2})$$

und quadrieren es, um das Keplersche Gesetz Gl. (22) zu verwenden und erhalten so das Resultat

$$r_{EM2} = (L_{EM2}/L_{EM1})^2 r_{EM1} \quad (23)$$

Wir können also den Abstand  $r_{EM2}$  zwischen Erde und Mond im Zustand der gebundenen Rotation des Erde-Mond-

Systems leicht angeben: mit den Werten für die Bahndrehimpulse  $L_{EM2}$  und  $L_{EM1}$  in Gl. (20) und (14) ist

$$\begin{aligned} r_{EM2} &= (34,33 : 28,48)^2 \cdot 384.000 \text{ km} \\ &= 558.000 \text{ km} \quad , \quad (24) \end{aligned}$$

also eine Zunahme der Mondentfernung zur Erde von 174.000 km .

Da nun alle relevanten Größen vorliegen, lässt sich aus Gl. (20), (21) und (24) nun auch die Umlaufzeit  $T_{EM2}$  des Systems Erde und Mond um ihren gemeinsamen Schwerpunkt S im Zustand der gebundenen Rotation beider Körper berechnen:

$$\begin{aligned} T_{EM2} &= \mu r_{EM2}^2 \frac{2\pi}{L_{EM2}} \\ &= 47,8 \text{ Tage} \quad . \quad (25) \end{aligned}$$

Die Erde und der Mond benötigen also 47,8 heutige Tage, um sich in einer gebundenen Rotation um den gemeinsamen innerhalb der Erde befindlichen Schwerpunkt S und zugleich um sich selbst zu drehen.

Wir können unsere Werte noch etwas korrigieren, wenn wir in einem iterativen Schritt den Wert für  $\omega_{EM2}$  in Gl. (18) anstelle von  $\omega_{E2}$  einsetzen und die gesamte Rechnung noch einmal durchführen. Damit gleichen wir einen Fehler aus, den wir ggf. bei der Vereinfachung der Gl. (18) gemacht haben, wobei eine einmalige Iteration ausreichend ist. Wir ersparen uns die Darstellung dieser zweiten Berechnung und geben nur die leicht veränderten Ergebnisse an:

Abstand Erde-Mond  $r_{EM2} = 555.000$  km, d. h. ein Abstandszuwachs von 171.000

km; Umlaufzeit des Systems Erde-Mond  $T_{EM2} = 47,5$  Tage; Umlaufzeit der Eigendrehung der Erde  $T_{E2} = 47,5$  Tage.

Als Bezugskoordinatensystem hatten wir den Sternenhimmel gewählt. Die ermittelten Winkelgeschwindigkeiten und Umlaufzeiten beziehen sich also auf die Sterne. Wir möchten auch gerne wissen, wie lang ein Sonnentag zum Zeitpunkt der gebundenen Rotation ist. Wenn sich das System Erde-Mond gegenüber den Sternen einmal um sich selbst gedreht hat, sind 47,5 heutige Tage vergangen. In dieser Zeit ist das System bei seiner Bewegung um die Sonne ein gutes Bahnstück weiter gewandert. In 365,25 Tagen legt das System einen Bogen von  $360^\circ$  zurück und in 47,5 Tagen einen Bogen von  $46,8^\circ$ . Um diesen Winkel muss sich das System Erde-Mond weiter um sich selbst drehen, damit es genau eine Umdrehung relativ zur Sonne vollzogen hat. Für die Rotation von  $360^\circ$  um sich selbst benötigt das System Erde-Mond 47,5 Tage und für  $360^\circ$  plus  $46,8^\circ$  rund 53,6 Tage. Im Zustand der gebundenen Rotation ist ein Sonnentag also 53,6 heutige Tage lang.

## Diskussion der Ergebnisse

Der Abstand Erde-Mond wächst in dem betrachteten Zeitraum um 171.000 km. Wir hatten für den gesamten Prozess des Übergangs in den Zustand der gebundenen Rotation eine Zeitspanne

von 3 Milliarden Jahren angesetzt. Pro Jahr würde somit der Abstand um 5,7 cm wachsen. Seit einigen Jahren kann man die Entfernung zwischen Erde und Mond durch den Einsatz von Lasertechnik direkt messen. Aus den Messdaten ist - über mehrere Jahre gemittelt - ein jährlicher Entfernungszuwachs von rd. 4 cm festgestellt worden. Dass der von uns ermittelte Wert mit dem gemessenen ganz gut übereinstimmt, liegt vor allem daran, dass wir ganz bewusst von den in der Fachliteratur angegebenen unterschiedlichen Prozesszeiträumen die Zeitspanne von 3 Milliarden Jahre ausgewählt haben.

Des weiteren haben wir unterstellt, dass der Prozess linear verläuft, was nicht unbedingt richtig sein muss. Wie an anderer Stelle schon ausgeführt, haben wir mögliche Veränderungen der Gezeitenreibung durch Strukturveränderungen der Meere und der Kontinente und auch mögliche Einwirkungen anderer Planeten nicht berücksichtigen können.

In etwa 500 Millionen Jahren hat sich der Mond so weit von der Erde entfernt, dass seine von der Erde aus sichtbare Scheibe deutlich kleiner geworden ist und die Sonnenscheibe nicht mehr vollständig bedecken kann. Totale Sonnenfinsternisse wird es dann nicht mehr geben.

Im Stadium der gebundenen Rotation ist der Mond - wie bereits ausgeführt - von der Erde aus immer an der gleichen Stelle zu sehen. Die Flutberge verharren

immer auf der Verbindungslinie Erde-Mond, sie laufen nicht mehr um. Die Erde wird sich durch die Gezeitenkräfte an den beiden Stellen aufwölben, es wird ein leicht eiförmiger Erdkörper entstehen. Gezeitenreibungen gibt es nicht mehr.

Sehr wahrscheinlich wird es aber zum Zeitpunkt der gebundenen Rotation keine Beobachter auf der Erde mehr geben, die das alles feststellen könnten. In 1 Milliarde Jahren wird die Sonne größer als heute und ihre Leuchtkraft um 10 % stärker sein. Die Temperatur auf der Erde wird so hoch sein, dass die Verdunstungsrate der Meere ansteigen und es zu einer erhöhten Wolkenbildung kommen wird. Der Treibhauseffekt wird dann so stark angestiegen sein, dass Leben in der heutigen Form stark beeinträchtigt sein dürfte. In 3,5 Milliarden Jahren hat die Leuchtkraft der Sonne um 40 % zugenommen und die Temperatur auf der Erde wird 100 °C erreichen und sogar übersteigen. Die Ozeane werden verdampfen, ein Leben auf der Erde ist dann nicht mehr möglich.

In 7 bis 8 Milliarden Jahren wird die Sonne ein roter Riese und ein Überriese werden. Merkur und Venus werden dann von der Sonne geschluckt. Es kann sein, dass die Erde das gleiche Schicksal erleiden muss, weil der Sonnenradius etwa den Erdbahnradius erreichen wird. Es ist auch möglich, dass die Erde weiter außen einen neuen Bahnradius

von etwa 1,7 AE einnehmen kann, weil die Sonne im Stadium des roten Riesen durch den starken Sonnenwind Masse verliert und damit auch Gravitationskraft einbüßt, der Bahndrehimpuls der Erde aber erhalten bleibt.

Im Verlauf der Zeit, in der sich die Sonne zu einem roten Riesen entwickelt, wird die Erde ihren Mond verlieren. Der Zustand der gebundenen Rotation des Systems Erde-Mond ist nicht von Dauer. Die Sonne entzieht durch Gezeitenwirkung dem System Drehimpuls mit der Folge, dass der Abstand Erde-Mond wieder abnimmt. Dabei wird der Mond der Erde so nahe kommen, dass er von den Gezeitenkräften zerrissen wird und die Bruchstücke sich in einem Ring um die Erde legen werden, ähnlich dem Saturnring.

## Bildnachweise:

S. 6	Portrait Gerd Neumann	GN
S. 9	Grafik Erde - Mond System I	NB
S. 12	Grafik Erde - Mond System II	NB
S. 21	Fotokuppel	MD
S. 22	l. o. Auf dem Telegraphenberg	MD
	r. o. Kuppeln auf d. Telegrapfenberg	MD
	r. u. Anlage Telegraphenberg 1898	MD
S. 23	u. l. Großer Refraktor 2007	MD
	o. r. Großer Refraktor 1998	MD
S. 24	l. o. Spektrograph von 1898	MD
	l. u. Kuppel Telegraphenberg	MD
S. 25	l- Zeiss Kleinplanetarium	HP
	o. r. Sonnenphysikalisches Kabinett	HP
	u. r. Sonnenbeobachtung live	JS
S. 26	o. l. Spiegelteleskop	JS
	u. l. Refraktor	KK
	o. r. Ilonas Blick	JS
S. 27	Doppelrefraktor	HP
S. 29	Die Sonne	HS
S. 30	Wir malen den Saturn	HS
S. 31	Auf Schalke, bearbeitet	GE/HS
	l. u. Mars	HS
S. 32	l. o. Jupiter auf d. Bildungszentrum	HS
	r. u. Planetenweg aufgehängt	HS

NB - Norbert Bertels, GE - Google Earth,  
 MD - Michael Dütting, KK - Klaus Kumbrink,  
 GN - Gerd Neumann, HP - Hans-Georg Pel-  
 lengahr, HS - Hermann Soester, JS - Jürgen  
 Stockel,

### Anmerkung:

*Während der Überarbeitung von Norberts Artikeln habe ich mich intensiv mit seinen Gedanken und Ideen befasst, was mir sehr viel Freude bereitet hat. Ich hoffe, dass seine Begeisterung für dieses Thema viele Interessenten erreicht.*

*An manchen Stellen hätte ich allerdings seine Hilfe dringend benötigt.*

*Sollten beim Lesen der Artikel Unklarheiten auftreten, müssten diese mit mir besprochen werden.*

*Dr. Wolfgang Domberger*