Geschwindigkeiten im Perihel und im Aphel

Wolfgang Domberger, Ewald Segna

In einer unserer Redaktionssitzungen kam mal die Frage auf, welche Geschwindigkeiten Himmelskörper in Sonnennähe aufweisen - speziell dachten wir dabei an Hale-Bopp.

Hier sollen nun einige Gleichungen hergeleitet werden, mit deren Hilfe man die entsprechenden Zahlenwerte errechnen kann.

Zunächst kann man mit dem Energieerhaltungssatz beginnen, wonach die Gesamtenergie, d. h. die Summe aus kinetischer und potentieller Energie erhalten bleibt, also $E_{kin} + E_{pot} = const.$, sofern keine Energie in irgendeiner Form in das System hinein- oder aus dem System herausfließt.

Bezogen auf die speziellen Punkte Perihel (P) und Aphel (A) der Bahn des Himmelskörpers mit der Masse m um die Sonne (Masse M_o) lautet der Energiesatz:

$$\frac{m}{2}v_P^2 - G\frac{mM_o}{r_P} = \frac{m}{2}v_A^2 - G\frac{mM_o}{r_A} \quad (1)$$

wobei v_P bzw. v_A die Geschwindigkeiten im Perihel bzw. Aphel und r_P bzw. r_A die Perihel- bzw. Apheldistanzen bedeuten.

Umgeformt erhält man

$$(v_P^2 - v_A^2) = 2GM_o\left(\frac{1}{r_P}-\frac{1}{r_A}\right) \quad (2)$$

Für r_P bzw. r_A kann man auch

$$r_P = a(1-e), r_A = a(1+e) \quad (3)$$

schreiben, wobei a die große Halbachse der elliptischen Bahn und e ihre numerische Exzentrizität bedeuten. Damit geht der Klammerausdruck von (2) über in

$$\frac{1}{r_P}-\frac{1}{r_A}=\frac{1}{a}\left(\frac{1}{1-e}-\frac{1}{1+e}\right) = \frac{2e/a}{(1-e)(1+e)}=\frac{2e/a}{1-e^2} \quad (4)$$

Als nächstes bietet sich an, den Drehimpulserhaltungssatz zu bemühen. Bezogen auf den Perihel und den Aphel, hat er eine besonders einfache Form, denn hier bilden die in der Bahnebene liegenden Geschwindigkeiten v_P und v_A einen rechten Winkel zu den Distanzen r_P und r_A. Also gilt:

$$mv_Pr_P = mv_Ar_A \text{ oder } \frac{v_A}{v_P}=\frac{r_P}{r_A} \quad (5)$$

Die Verwendung von (3) macht daraus

$$\frac{v_A}{v_P}=\frac{1-e}{1+e} \text{ oder } v_A=\frac{1-e}{1+e}\cdot v_P \quad (6)$$

was man in (2) einsetzen kann:

$$v_P^2\left[1-\left(\frac{1-e}{1+e}\right)^2\right] = 4\frac{GM_O}{a}\frac{e}{(1-e)(1+e)}; \quad (7)$$

umgeformt, gekürzt und die Wurzel gezogen bekommt man das Resultat

$$v_P = \sqrt{\frac{GM_O}{a}}\cdot\sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \quad (8)$$

und mit (6)

$$v_A = \sqrt{\frac{GM_O}{a}}\cdot\sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \quad (8a)$$

Um zu konkreten Zahlenwerten zu gelangen, setzt man die Gravitationskonstante

$G = 6{,}672\cdot 10^{-11}\frac{Nm^2}{kg^2}$ und die

Sonnenmasse $M_o = 1{,}989\cdot 10^{30}\,kg$ ein.

Die Bahn von Hale-Bopp ist bestimmt durch

$a = 2{,}79151\cdot 10^{13}\,m = 186{,}1\,AE$ und $e = 0{,}99511$. Einsetzen ergibt:

$$\sqrt{\frac{GM_O}{a}} = 2{,}18\frac{km}{s}, \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} = 20{,}194,$$

$$\sqrt{\frac{1-e}{1+e}} = 0{,}0495$$

also:

$$v_P = 44{,}031\frac{km}{s}$$

$$v_A = 0{,}108\frac{km}{s}$$

Bildnachweis:

Titelseite:
Komet Hale Bopp, 7.4.97, 14 Min. auf Kodak Elite 400, 500 mm/f 4
Foto: Matthias Felsch

Umschlagseite 2, oben:
Schalenstruktur von Hale-Bopp, 21.3.97, 50 sek auf Kodak Elite 400, Okularprojektion mit C 8/f ca. 12m
Foto: Wolfgang Domberger

Umschlagseite 2, unten:
M42/Orionnebel,15.1.97, 11 min auf Elite II 400, mit C 8/1.000 mm/f 5
Foto: Wolfgang Domberger

Umschlagseite 3, oben:
M31/Andromeda-Nebel, 31.10.97, 56 min auf Kodak Elite 400, 5" Starfire/f 6
Foto: Matthias Felsch

Umschlagseite 3, unten:
Eta-Carinae-Nebel, Juli 1994/Namibia, 40 min auf Elite 400 hyp.,
Nikon 300 mm/f 4,0
Foto. S. Freff und M. Große

Rückseite:
NGC 7.000/Nordamerikanebel, 24.9.97/ Schweiz, 20 min auf Kodak Pro Gold 400, Traveler 105 mm/f 5,8 mit Pentax 67
Foto: Klaus Kumbrink

Seite 5:
Hale-Bopp, 21.3.97, 10 min, Elite II 400, 135 mm/f 4, Foto: W. Domberger